Géométrie du billard français

Devoir de terminale C proposé en 1990-91 au lycée St Criq de Pau
par Thierry Fernandez (tfern90@gmail.com)

Devoir TᵉC . Lycée St CRICQ - PAU.

Exposé du problème.

Soit un billard dont la partie intérieure peut se représenter par un rectangle ABCD de longueur L et de largeur ℓ avec $AB = L$ et $L > \ell$.

Nous avons deux boules b_1 et b_2 sur le billard. Nous assimilerons b_1 et b_2 à deux points. La position initiale de b_1 est repérée par le point B_1 et la position initiale de b_2 est repérée par le point B_2.

B_1 et B_2 sont deux points de l'intérieur du rectangle ABCD.

On traite ce problème dans le plan $\mathcal{P}$ orienté.

On pose $\vec{i} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AD}\|} \cdot \overrightarrow{AD}$. $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormal direct.

L'unité de longueur est le mètre.

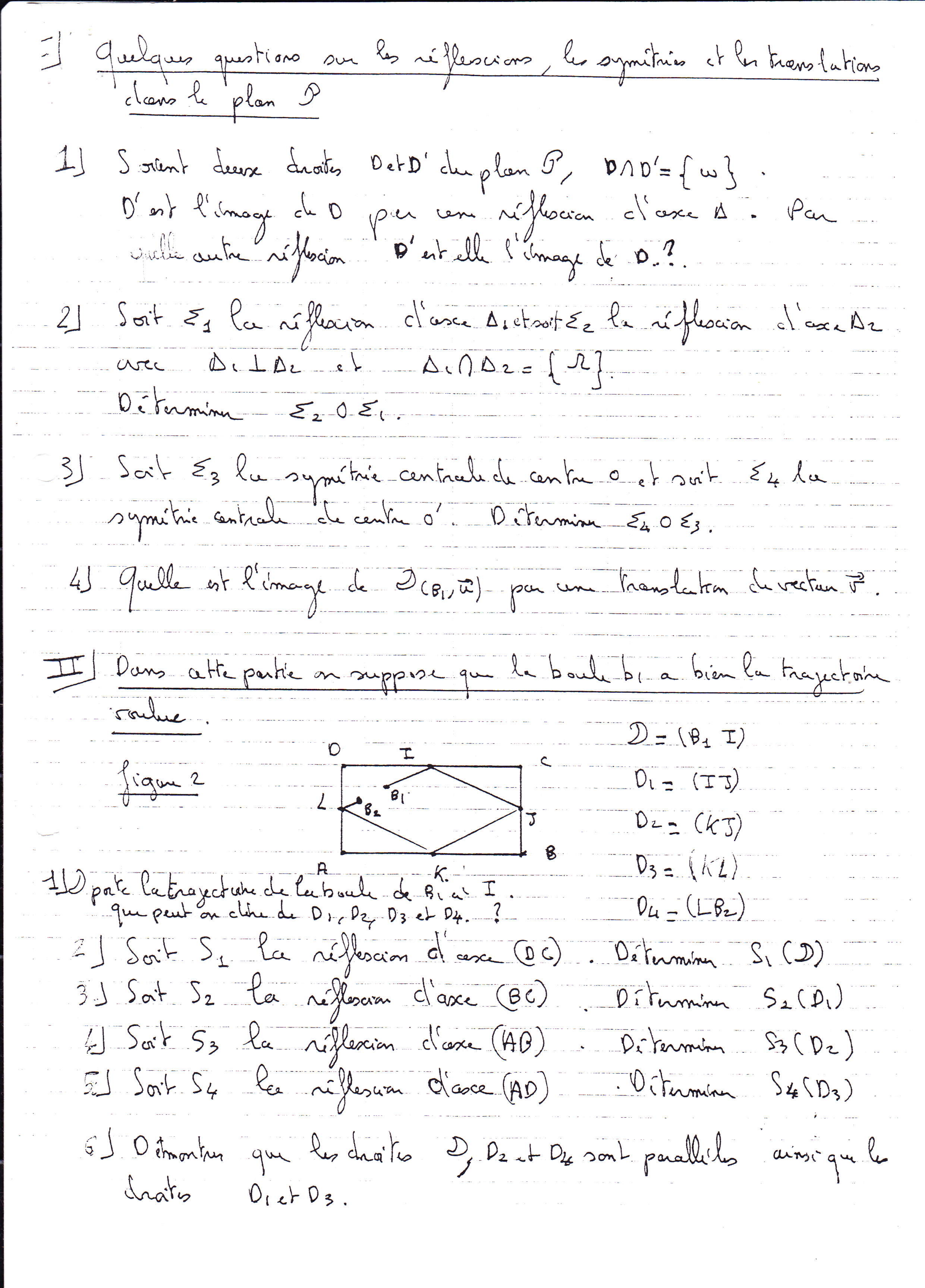
$B_1(x_0, y_0)$ et $B_2(X, Y)$ avec : $\begin{cases} x_0 \in]0, L[\\ y_0 \in]0, \ell[\\ X \in]0, L[\\ Y \in]0, \ell[\end{cases}$

On frappe la boule b_1 et elle se déplace, au départ, le long de la droite $\mathcal{D}\left[B_1, \vec{u}\binom{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$, $\left(\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$.

Le but du problème est de déterminer la valeur de θ, si elle existe, pour que b_1 percute b_2 après avoir été en contact successivement avec les quatre côtés dans l'ordre suivant [DC], [BC], [AB] et [AD]

Indication: figure 1 (côté du billard) (choc d'une boule sur un côté du billard)

b_1



I] Quelques questions sur les réflexions, les symétries et les translations dans le plan $\mathcal{P}$

1] Soient deux droites D et D' du plan $\mathcal{P}$, $D \cap D' = \{\omega\}$.
D' est l'image de D par une réflexion d'axe Δ. Par quelle autre réflexion D' est elle l'image de D ?

2] Soit Σ_1 la réflexion d'axe Δ_1 et soit Σ_2 la réflexion d'axe Δ_2 avec $\Delta_1 \perp \Delta_2$ et $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{\Omega\}$.
Déterminer $\Sigma_2 \circ \Sigma_1$.

3] Soit Σ_3 la symétrie centrale de centre O et soit Σ_4 la symétrie centrale de centre O'. Déterminer $\Sigma_4 \circ \Sigma_3$.

4] Quelle est l'image de $\mathcal{D}_{(B_1, \vec{u})}$ par une translation de vecteur $\vec{v}$.

II] Dans cette partie on suppose que la boule b_1 a bien la trajectoire voulue.

figure 2

$\mathcal{D} = (B_1 I)$

$D_1 = (IJ)$

$D_2 = (KJ)$

$D_3 = (KL)$

$D_4 = (LB_2)$

1] Porte la trajectoire de la boule de B_1 à I.
Que peut on dire de D_1, D_2, D_3 et D_4 ?

2] Soit S_1 la réflexion d'axe (DC). Déterminer $S_1(\mathcal{D})$

3] Soit S_2 la réflexion d'axe (BC). Déterminer $S_2(D_1)$

4] Soit S_3 la réflexion d'axe (AB). Déterminer $S_3(D_2)$

5] Soit S_4 la réflexion d'axe (AD). Déterminer $S_4(D_3)$

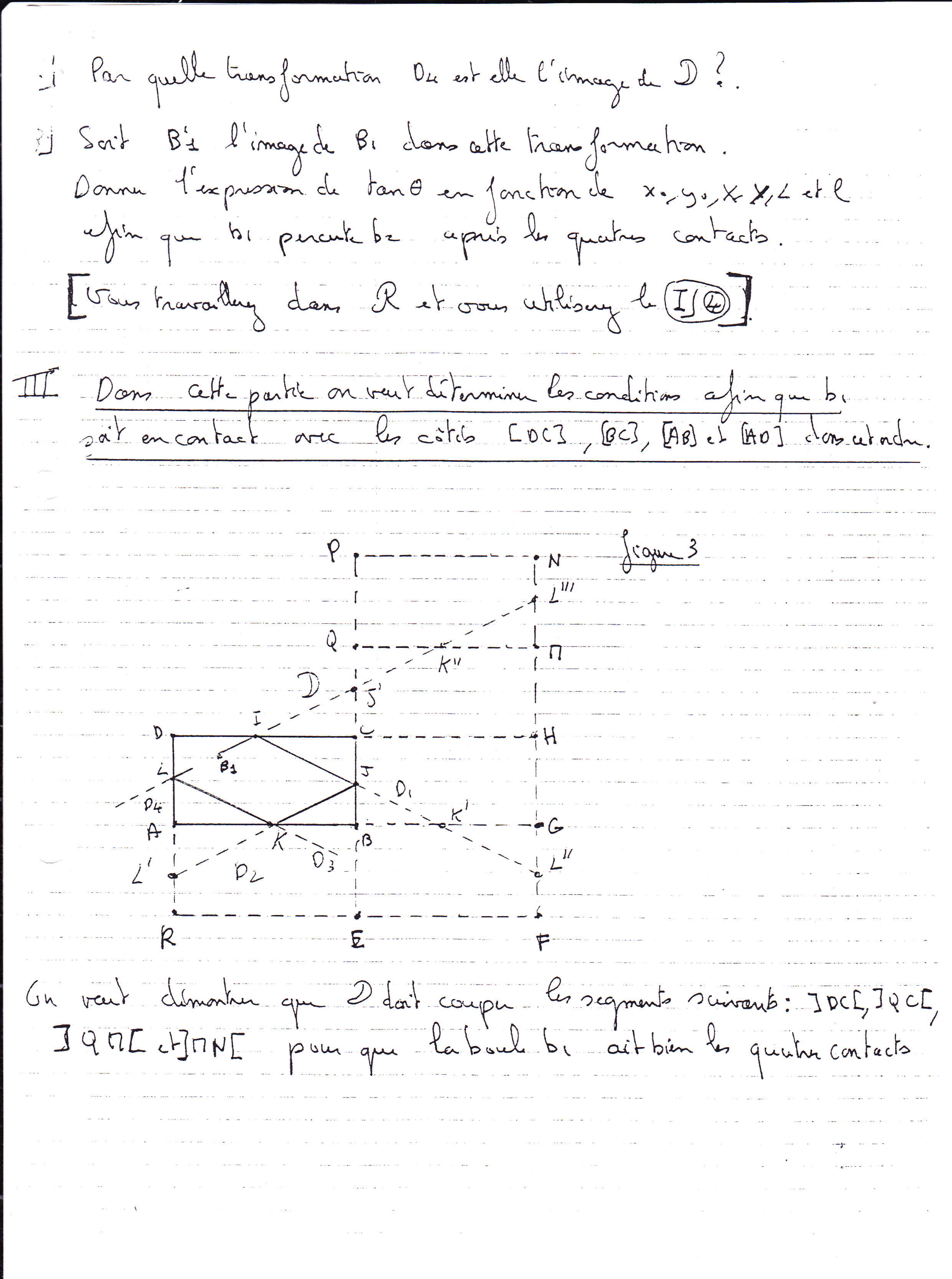
6] Démontrer que les droites $\mathcal{D}$, D_2 et D_4 sont parallèles ainsi que les droites D_1 et D_3.

1) Par quelle transformation D_4 est elle l'image de $\mathcal{D}$?.

3) Soit B'_1 l'image de B_1 dans cette transformation.
Donner l'expression de $\tan\theta$ en fonction de x_0, y_0, X, Y, L et l afin que b_1 percute b_2 après les quatres contacts.

[Vous travaillerez dans $\mathcal{R}$ et vous utiliserez le (I)(4)]

III Dans cette partie on veut déterminer les conditions afin que b_1 soit en contact avec les côtés [DC], [BC], [AB] et [AD] dans cet ordre.



On veut démontrer que $\mathcal{D}$ doit couper les segments suivants :]DC[,]QC[,]QΠ[et]ΠN[pour que la boule b_1 ait bien les quatre contacts.

1] Début de la démonstration

$$D \cap]QC[= \{ J' \}.$$

$$S_1(D \cap]QC[) = S_1(D) \cap S_1(]QC[) = \{ S_1(J') \}.$$

$$D_1 \cap]CB[= \{ J \}.$$

On a bien un contact avec le côté [CB]

2] Finir la démonstration.

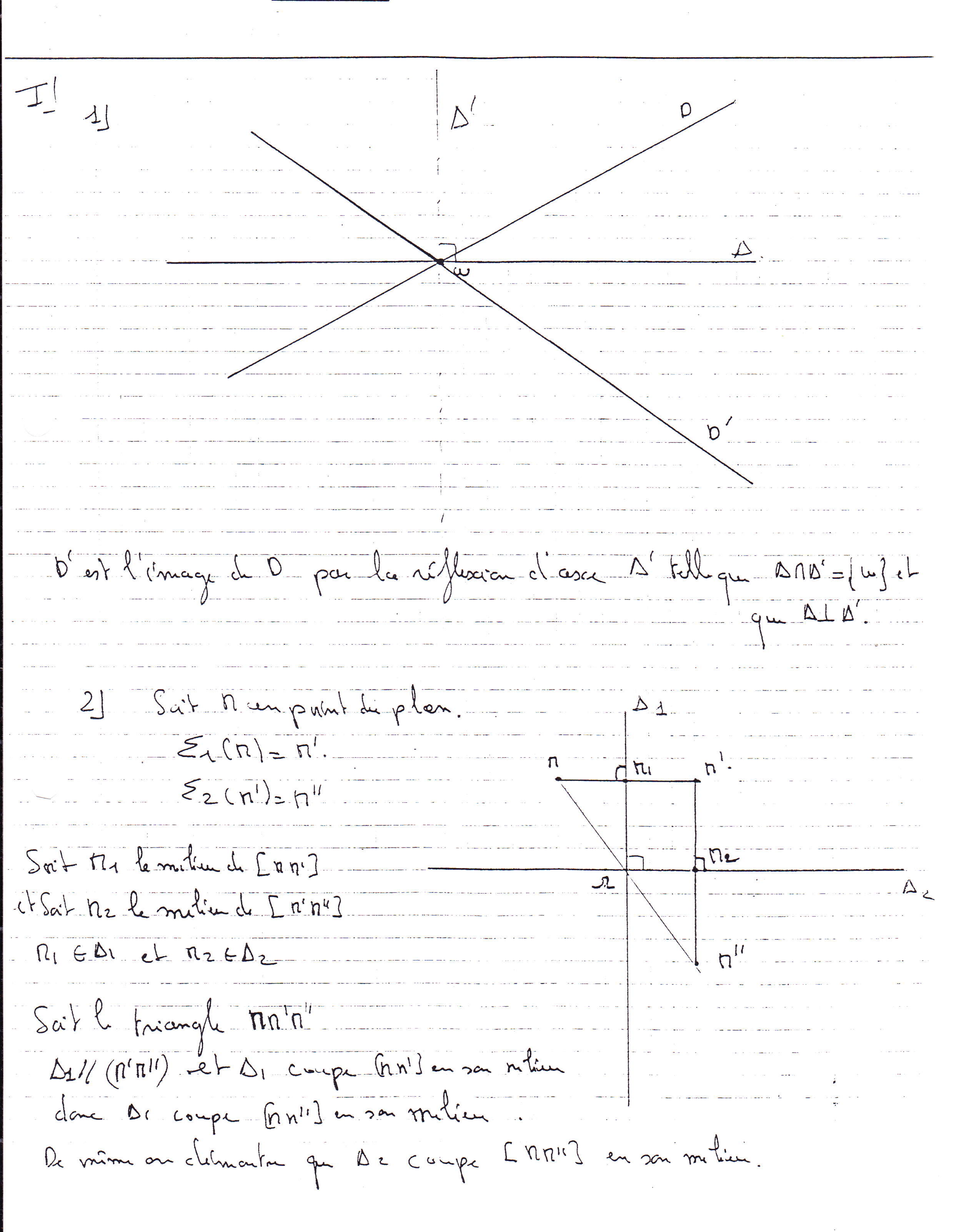
3] En écrivant une équation cartésienne de D, les équations et les inéquations qui définissent les segments en question, écrire les conditions que doit remplir $\tan\theta$ afin que D ait bien les intersections voulues.
(Indication : $\tan\theta > 0$ car $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

4] Ecrire toutes les conditions sur $\tan\theta$ qui permettent au problème d'être éventuellement résolu.

IV] Application numérique.

$L = 3\,m$ $\quad l = 1{,}5\,m$ $\quad x_0 = 1$ $\quad y_0 = 1$ $\quad X = 0{,}5$ $\quad Y = 0{,}5$.

Donner une valeur de θ ($\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$), si elle existe.



Correction.

I/ 1)

D' est l'image de D par la réflexion d'axe Δ' telle que $\Delta \cap \Delta' = \{\omega\}$ et que $\Delta \perp \Delta'$.

2) Soit M un point du plan.

$S_1(M) = M'$.

$S_2(M') = M''$

Soit M_1 le milieu de $[MM']$ et soit M_2 le milieu de $[M'M'']$

$M_1 \in \Delta_1$ et $M_2 \in \Delta_2$

Soit le triangle $MM'M''$

$\Delta_1 \parallel (M'M'')$ et Δ_1 coupe $[MM']$ en son milieu donc Δ_1 coupe $[MM'']$ en son milieu.

De même on démontre que Δ_2 coupe $[MM'']$ en son milieu.

or $D_1 \cap D_2 = \{\Omega\}$ donc Ω est le milieu de $[MM'']$.

<u>M'' est l'image de M par la symétrie centrale de centre Ω.</u>

$S_2 \circ S_1 = S_\Omega$

3] Soit N un point du plan.

$S_3(N) = N' \iff \vec{ON'} = -\vec{ON}$

$S_4(N') = N'' \iff \vec{O'N''} = -\vec{O'N'}$

$\vec{NN''} = \vec{NN'} + \vec{N'N''} = 2\vec{ON'} + 2\vec{N'O'}$
$= 2\vec{OO'}$

$\vec{NN''} = 2\vec{OO'}$

$S_4 \circ S_3 = T_{(2\vec{OO'})}$: <u>Translation de vecteur $2\vec{OO'}$</u>.

4] $t_{\vec{v}}(D) = D'$. <u>or $D' // D$ et $t_{\vec{v}}(B_1) \in D'$</u>

II 1] D_1 porte la trajectoire de b_1 de I à J. D_2 porte la trajectoire de J à K.
D_3 porte la trajectoire de K à L D_4 porte la trajectoire de L à B_2.

2] $S_1(D) = D_1$ 3] $S_2(D_1) = D_2$ 4] $S_3(D_2) = D_3$ 5] $S_4(D_3) = D_4$

6] $S_2(D_1) = D_2 = S_2(S_1(D)) = (S_2 \circ S_1)(D) = S_C(D) = D_2$
donc $D // D_2$

$S_4(D_3) = (S_4 \circ S_3)(D_2) = S_A(D_2) = D_4$ donc $D_4 // D_2$

On a bien $D // D_2 // D_4$.

même démonstration pour D_1 et D_3. on a <u>$D_1 // D_3$</u>

7] $D_4 = S_4(D_3) = S_4 \circ S_3(D_2) = S_A(D_2) = S_A(S_C(\mathcal{D}))$
$= (S_A \circ S_C)(\mathcal{D})$.
$= t_{(2\vec{CA})}(\mathcal{D})$.

$$t_{(2\vec{CA})}(\mathcal{D}) = D_4$$

8] $t_{(2\vec{CA})}(B_1) = B'_1$

$\vec{B_1B'_1} = 2\vec{CA}$

$\vec{AB'_1} = -2\vec{AC} + \vec{AB_1} = (-2L + x_0)\vec{i} + (-2\ell + y_0)\vec{j}$

afin que b1 percute b2 il faut que $\vec{B_2B'_1}$ soit colinéaire à $\vec{u}$.

$\vec{B_2B'_1} = \vec{AB'_1} - \vec{AB_2} = (-2L + x_0 - X)\vec{i} + (-2\ell + y_0 - Y)\vec{j}$

$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\det(\vec{B_2B'_1}, \vec{u}) = 0 \iff (-2L + x_0 - X)\sin\theta = (-2\ell + y_0 - Y)\cos\theta$

$(0 < x_0 < L)$ et $(0 < X < L) \Rightarrow -3L < -2L + x_0 - X < -L < 0$

$$\tan\theta = \frac{y_0 - Y - 2\ell}{x_0 - 2L - X}$$

III] 1]

2] a] $\mathcal{D} \cap]QR[= \{K''\}$.

$S_1(\mathcal{D} \cap]QR[) = D_1 \cap]BG[= \{K'\}$

$S_2(D_1 \cap]BG[) = D_2 \cap]AB[= \{K\}$. cqfd.

b] $\mathcal{D} \cap]RN[= \{L'''\}$.

$S_1(\mathcal{D} \cap]RN[) = \{L''\} = D_1 \cap]GF[$

$S_2(D_1 \cap]GF[) = D_2 \cap]AR[= \{L'\}$

$S_3(D_2 \cap]AR[) = D_3 \cap]AD[= \{L\}$. cqfd

Conclusion : b_1 rentre en contact avec les côtés $[DC]$, $[BC]$, $[AB]$ et $[AD]$ respectivement en I, J, K et L.

3) $\mathcal{D}$: $\sin\theta\,(x-x_0) - \cos\theta\,(y-y_0) = 0$

$\mathcal{D}$: $y = y_0 + (x-x_0)\tan\theta$

$\mathcal{D}$: $x = x_0 + (y-y_0)\cdot\frac{1}{\tan\theta}$.

$]DC[: \begin{cases} y = \ell \\ 0 < x < L \end{cases}$ $\quad]QC[: \begin{cases} x = L \\ \ell < y < 2\ell \end{cases}$

$]QM[: \begin{cases} y = 2\ell \\ L < x < 2L \end{cases}$ $\quad]MN[: \begin{cases} x = 2L \\ 2\ell < y < 3\ell \end{cases}$

a) $\mathcal{D} \cap]DC[= \{I\} \Leftrightarrow \tan\theta > \frac{\ell-y_0}{L-x_0}$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

b) $\mathcal{D} \cap]QC[= \{J'\} \Leftrightarrow \frac{\ell-y_0}{L-x_0} < \tan\theta < \frac{2\ell-y_0}{L-x_0}$

c) $\mathcal{D} \cap]QM[= \{K''\} \Leftrightarrow \frac{2\ell-y_0}{2L-x_0} < \tan\theta < \frac{2\ell-y_0}{L-x_0}$

d) $\mathcal{D} \cap]MN[= \{L'''\} \Leftrightarrow \frac{2\ell-y_0}{2L-x_0} < \tan\theta < \frac{3\ell-y_0}{2L-x_0}$

4) Bilan.

$\frac{\ell-y_0}{L-x_0} < \tan\theta < \frac{2\ell-y_0}{L-x_0}$

$\frac{2\ell-y_0}{2L-x_0} < \tan\theta < \frac{3\ell-y_0}{2L-x_0}$

$\tan\theta = \frac{y_0-Y-2\ell}{x_0-X-2L}$

$\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

IV) Application numérique

$L = 3m$ $l = 1.5m$ $x_0 = 1$ $y_0 = 1$ $X = 0.5$ $Y = 4.5$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{4} < \tan\theta < 1 \\ \frac{2}{5} < \tan\theta < \frac{7}{10} \\ \tan\theta = \frac{5}{11}. \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

~~$\theta = 0{,}45\ldots\ldots$~~

$\theta \simeq 0{,}4266$ rd

B_1 B_0

Autre façon de traiter le Pb

→ on calcule $b_3 = t_{2\pi\vec{c}}(b_2)$

⇒ on trace la droite $D = (b_1 b_3)$

→ cette droite donne la direction pour frapper la boule b_1

(Il reste à vérifier les 4 bandes)